

*Problema teoretică nr. 1 (10 puncte)*

*Mașina lui Fred și Barney*

Fred și Barney și-au construit o mașină având ca „roți” două prisme pătrate identice (figura 1). Roțile sunt perfect adaptate formei drumului, care este o succesiune periodică a unor denivelări identice. Când Fred și Barney parcurg cu mașina un astfel de drum, centrul de masă al acesteia nu se deplasează pe verticală.



Figura 1

Consideră că roțile nu alunecă niciodată pe drum. În cursul mișcării mașinii, muchia lungă a unei roți ajunge mereu într-o „vale” a drumului; „culmile” drumului sunt atinse după linii care trec prin mijloacele fețelor dreptunghiulare ale „roților”. Mișcarea mașinii începe din vârful a două denivelări. Inițial, viteza de translație orizontală este  $\vec{v}_0$ .

Greutatea totală a vehiculului, excluzând „roțile” este  $M \cdot \vec{g}$ , distribuită egal pe axele celor două roți. Presupune că singurele forțe care acționează asupra mașinii sunt gravitația și forța de reacțiune normală.

*Sarcina de lucru nr. 1 - Energia cinetică a mașinii*

**1.a.** Determină expresia momentului de inerție  $J$  a uneia dintre roți față de axa proprie. Fiecare roată are masa  $m$  și o secțiune transversală cu latura de lungime  $2a$ .

**1.b.** Dedu expresiile pentru energia cinetică a mașinii și pentru viteza unghiulară a roților acesteia, atunci când:

- i. mașina se află pe vârful denivelărilor;
- ii. mașina trece cu fiecare roată în câte o vale.

*Sarcina de lucru nr. 2 - Forma drumului*

În schița din figura 2 este prezentată mișcarea laturii de jos a secțiunii pătrate a roții pe reliefurile elementare (curba care trece prin punctele  $x_s, T, x_d$ ).

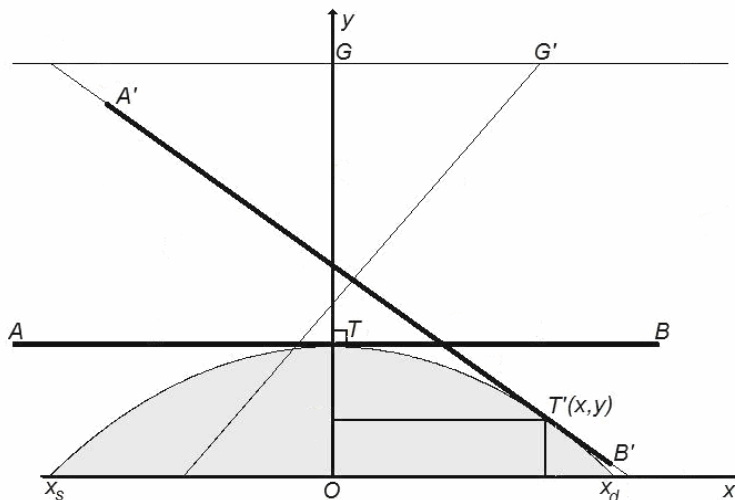


Figura 2

Drumul reprezintă repetarea periodică a unor astfel de reliefuri elementare.

În secțiune, axa  $Ox$  a sistemului de coordonate trece prin văile reliefului, iar axa  $Oy$  trece prin vârful denivelării.  $AB$  reprezintă latura roții,  $T$  este punctul de contact dintre roată și drum, iar  $G$  reprezintă poziția axului în poziția inițială.  $A'B'$ ,  $T'$ ,  $G'$  au aceleași semnificații – pentru o poziție oarecare a roții.

Se constată că, în secțiune, axul roții se află întotdeauna pe verticala punctului de contact dintre roată și drum.

**2.a.** Scrie o scurtă explicație referitoare la constatarea că axul roții se află întotdeauna pe verticala punctului de contact dintre roată și drum.

**2.b.** Determină forma analitică  $y = y(x)$  a secțiunii drumului.

*Indicație:*

Derivata  $y'(x)$  a funcției  $y = y(x)$  este panta tangentei la graficul funcției în punctul  $x$ .

Dacă îți este necesar, ai în vedere că  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$ .

Îți recomandăm să folosești notațiile  $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ;  $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  cu proprietatea  $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$ .

**2.c.** Dedu expresia pentru lungimea (pe orizontală) a unui relief elementar.

**2.d.** Determină expresia distanței minime între axele roților mașinii lui Fred și Barney.

**2.e.** Precizează dacă o mașină cu roți în formă de prismă hexagonală regulată convenabil aleasă ar putea circula pe drumul a cărui formă a fost determinată în cadrul sarcinii de lucru 2.b., fără ca centrul de masă al roții să se deplaseze pe verticală. Justifică răspunsul.

### *Sarcina de lucru nr. 3 - Accident*

Presupune că expresia analitică a formei drumului este de tipul  $y = k - h \cdot ch(x/a)$ , unde  $k$  și  $h$  sunt două constante.

**3.a.** Determină domeniul de valori ale vitezei orizontale de deplasare a mașinii, în condițiile stabilite în enunțul problemei.

**3.b.** Precizează modul în care depinde - de poziția obstacolului - cantitatea de căldură care se poate degaja prin ciocnirea plastică dintre mașina lui Fred și acel obstacol. Imediat după ciocnire mașina se oprește. Justifică răspunsul.

**3.c.** Determină expresia căldurii eliberate în urma ciocnirii.

© Subiect propus de:

Prof. Dr. Delia DAVIDESCU

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI

FOAIE DE RĂSPUNSURI

Problema teoretică nr. 1

Mașina lui Fred și Barney

Sarcina de lucru nr. 1 - Energia cinetică a mașinii

1.a. Expresia momentului de inerție a uneia dintre roți

1,00p

1.b.i. Expresiile pentru energia cinetică a mașinii și pentru viteza unghiulară a roților, atunci când mașina se află pe vârful denivelărilor

1,00p

1.b.ii. Expresiile pentru energia cinetică a mașinii și pentru viteza unghiulară a roților, atunci când mașina trece cu fiecare roată în câte o vale

1,00p

Sarcina de lucru nr. 2 - Forma drumului

2.a. Scurtă explicație referitoare la faptul că axul roții se află întotdeauna pe verticala punctului de contact dintre roată și drum

0,50p

**2.b.** Forma analitică  $y = y(x)$  a secțiunii drumului

2,00p

**2.c.** Expresia pentru lungimea (pe orizontală) a unui relief elementar

0,50p

**2.d.** Expresia distanței minime între axele roților mașinii lui Fred și Barney

0,50p

**2.e.** Precizarea referitoare la faptul că o mașină cu roți în formă de prismă hexagonală regulată convenabil aleasă ar putea circula, sau nu, pe drumul a cărui formă a fost determinată în cadrul sarcinii de lucru 2.b., fără ca centrul de masă al roții să se deplaseze pe verticală. Justificarea răspunsului.

0,50p

*Sarcina de lucru nr. 3 - Accident*

**3.a.** Domeniul de valori ale vitezei orizontale de deplasare a mașinii

2,00p

**3.b.** Precizarea referitoare la modul în care depinde cantitatea de căldură degajată de poziția obstacolului. Justificarea răspunsului.

0,50p

**3.c.** Expresia căldurii eliberate în urma ciocnirii

0,50p