1. МАГНИТОСТАТИКА

Магнитодвижущую силу (МДС) можно определить как интеграл вдоль пути проекции вектора магнитной индукции B,

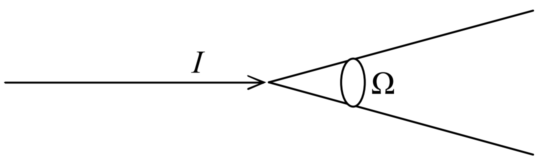
$$\int\limits_{\text{curve}} \vec{B}\vec{dl}\,.$$

Согласно теореме о циркуляции МДС вдоль замкнутой кривой пропорциональна электрическому току сквозь любую поверхность, натянутую на данную кривую. Коэффициент пропорциональности называется магнитной постоянной (μ_0).

$$\oint\limits_{\text{loop}} \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 I_{\text{across}}$$

Положительному направлению тока соответствует обход кривой *по часовой стрелке*.

a. Вдоль бесконечно длинного прямого проводника течёт ток I. Найдите величину и направление магнитной индукции B, создаваемой этим током в зависимости от расстояния r от проводника. Выразите результат через I, r и μ_0.
b. Тонкий однородный стержень массой m и длиной L расположен параллельно проводнику на расстоянии d. Это стержень может вращаться только вокруг оси, перпендикулярной плоскости проходящей через проводник и середину стержня. Вдоль стержня течёт постоянный ток I' в направлении, противоположном I. Стержень отклоняют на небольшой угол от положения равновесия и он начинает свободно колебаться. Определите период T_{slant} малых колебаний и выразите его через I, I', m, L, d и μ_0.
c. Система представляет собой полубесконечный прямолинейный провод, переходящий в бесконечную коническую поверхность, ось которой совпадает с осью проводника (см. рис.). По системе течёт постоянный ток I. Определите величину и направление магнитной индукции B на расстоянии r от оси как внутри ($B_{\text{IN}}(r)$), так и вне ($B_{\text{OUT}}(r)$) конической поверхности. Выразите результат через I, r и μ_0.



d. Система представляет собой полубесконечный прямолинейный провод, примыкающий к бесконечной проводящей плоскости, перпендикулярной проводу. По системе течёт постоянный ток I. Определите величину и направление магнитной индукции B на расстоянии r от оси провода по обе стороны от проводящей плоскости. Выразите результат через I, r и μ_0.
e. Определим линейную плотность тока $\vec{J}$, текущего по плоскости как:

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dI}{dl}\,,$$

где dl – элементарная длина, взятая вдоль направления перпендикулярного направлению элементарного тока dI.
Введём единичный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости, чтобы задать положительное направление пересечения плоскости. Векторное произведение

$\vec{J}\times\vec{n}$ определяет положительное направление компоненты B, параллельной плоскости.
Покажите, что при пересечении плоскости разница значений компоненты B (параллельной плоскости) пропорциональна значению J в точке пересечения. Найдите этот коэффициент пропорциональности.
f. Бесконечная проводящая плоскость параллельна однородному магнитному полю. Магнитная индукция B с обеих сторон плоскости имеет одинаковое направление, но разные значения B_1 и B_2. Определите давление, действующее на плоскость. Выразите результат через B_1, B_2 и μ_0.
g. Проводящая полая сфера соединяется на своих полюсах с двумя полубесконечными прямыми проводниками, направленными вдоль полярной оси. По системе течёт постоянный ток I. Определите величину и направление магнитной индукции B на расстоянии r от полярной оси как внутри, так и вне сферы. Выразите результат через I, r и μ_0.
h. Полюса проводящей полой сферы соединены прямолинейным проводом, находящимся внутри сферы. Постоянный ток I течёт по поверхности сферы от одного полюса к другому и затем назад по проводу. Определите величину и направление магнитной индукции B на расстоянии r от полярной оси как внутри, так и вне сферы. Выразите результат через I, r и μ_0.

По закону Био-Савара магнитная индукция, создаваемая током, текущим по элементарному пути длиной dl, определяется как:

$$\overrightarrow{dB}=\frac{\mu_0 I\left(\overrightarrow{dl}\times\vec{r}\right)}{4\pi r^3},$$

где r – расстояние от элементарного тока до данной точки.

i. По прямому проводу длиной L течёт постоянный ток I. Точка наблюдения находится в плоскости, проходящей через середину этого провода и перпендикулярной ему. Из этой точки провод виден под углом 2α. Определите величину магнитной индукции B в этой точке. Выразите результат через L, I, α и μ_0.
j. Постоянный ток I течёт по поверхности проводящей сферы радиуса R от одного полюса к другому. Определите величину и направление магнитной индукции B в экваториальной плоскости сферы в точке на расстоянии r от полярной оси как внутри, так и вне сферы. Выразите результат через I, R, r и μ_0.

2. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

При решении данной задачи гравитационными эффектами следует пренебречь. Все объекты считайте однородными и изотропными, если не указано иное.

A. Тонкий упругий стержень защищён от изгиба. Его длина L, плотность ρ, и модуль Юнга E. Стержень слегка растянули за концы и отпустили. После этого в нём возникли свободные колебания.
a. Запишите выражение для кинетической энергии стержня как функцию времени, выразив её через массу m стержня, длину L и скорость изменения ε (здесь ε - относительное удлинение).
b. Запишите выражение для потенциальной упругой энергии как функцию времени, выразив её через m, ρ, E и ε.
c. Покажите, что для стержня закон сохранения механической энергии приводит к характеристическому дифференциальному уравнению для незатухающих гармонических колебаний. Переходя к аналогии с точечной массой m, находящейся под действием силы σS (σ – это напряжение, а S – площадь поперечного сечения), укажите величину, которая играет роль координаты.
d. Запишите выражение для периода малых продольных колебаний стержня, выразив его через L, ρ и E.

B. Рассмотрите упругую сферу радиуса R, изготовленную из того же материала, что и стержень, о котором шла речь выше. Пусть ε – относительная деформация $\Delta R/R$. Сферу слегка радиально сжали и предоставили ей свободно колебаться.
e. Запишите выражение для механической энергии сферы как функцию времени, выразив её через m, R, ρ, E, ε и скорость изменения ε (здесь ε - относительное удлинение).
f. Запишите выражение для периода малых радиальных колебаний сферы, выразив его через R, ρ и E.

C. Рассмотрите тонкую упругую прямоугольную пластину, защищённую от изгиба. Пусть размеры пластины L и l. Толщину пластины считайте постоянной. Результаты воздействия напряжений σ_x и σ_y на пластину **не** являются независимыми, в том смысле, что деформация в одном направлении приводит к деформации в другом направлении. В пределах применимости закона Гука это можно записать, как:

$$\varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

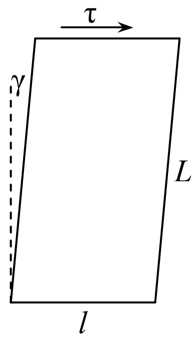
где безразмерный параметр μ (коэффициент Пуассона) примерно равен 0,3.
g. Выразите σ_x и σ_y через ε_x, ε_y, E и μ.
h. Запишите систему дифференциальных уравнений, описывающую движение точки массой m в двух взаимно перпендикулярных направлениях, используя в качестве координат эквивалентные величины, определённые в пункте **c**.
i. Найдите возможные значения ω для которых решениями вышеупомянутой системы являются незатухающие гармонические колебания (моды):

$$\varepsilon_x = A\sin\omega t$$
$$\varepsilon_y = B\sin\omega t\,.$$

Выразите результаты в терминах L, l, ρ, E и μ.

j. В общем случае, решение вышеупомянутой системы уравнений является суперпозицией двух найденных мод. Для квадратной пластины ($L = l$) и малого коэффициента Пуассона ($\mu^2 << 1$), выразите период биений через μ и период T_{long} продольных колебаний стержня той же длины.

D. Теперь, вместо сжатия, пластина испытывает деформацию сдвига вдоль одной из сторон под действием напряжения сдвига τ (см. рис.). Сдвиг определяется как tan γ ≈ γ, и законом Гука в виде:



$$\gamma = \frac{1}{G}\tau\ ;\ [\tau]_{\text{SI}} = [G]_{\text{SI}} = \text{N/m}^2\,,$$

где G – *модуль сдвига*.

k. Выразите G через E и μ.

l. Определите период малых сдвиговых колебаний пластины, выразив его через L, ρ и G. Выразите тот же период через μ и период колебаний стержня той же длины, испытывающего продольные колебания T_{long}.

E. Стержень радиусом R и длиной L, изготовленный из того же материала, подвергли небольшому скручиванию и предоставили совершать свободные крутильные колебания. Угол закручивания θ определяется как угол, на который скрутился стержень под действием приложенного крутильного напряжения. В этом случае закон Гука примет вид:

$$\theta = \frac{1}{C}M\ ;\ [C]_{\text{SI}} = [M]_{\text{SI}} = \text{Nm}\,,$$

где C – *модуль скручивания*.

m. Определите период малых крутильных колебаний стержня, выразив его через L, ρ и G.

n. Выразите модуль скручивания через R, L, E и μ.

3. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Альберт Эйнштейн назвал свою идею Принципа Эквивалентности (1907) "наиболее удачной мыслью моей жизни". Он вспоминает "Я сидел на стуле в патентном бюро в Берне, когда мне пришла в голову неожиданная мысль: ***если кто-то падает свободно, он не ощущает своего веса***. Я был поражён. Эта простая мысль оказала на меня глубокое влияние. Она подтолкнула меня к созданию теории гравитации."
Итак, если наблюдатель свободно падает, с ним можно связать инерциальную систему отсчёта, в которой гравитационное поле отсутствует. К сожалению, так как наблюдатели, находящиеся в различных точках пространства и времени будут падать с разными скоростями и в разных направлениях, можно использовать только ***локальные*** системы координат в каждой из которых ускорение, вызванное гравитацией, будет постоянным как по величине, так и по направлению.
Рассмотрим точечного наблюдателя с пренебрежимо малой, но не равной нулю массой в окрестностях массивного объекта с массой M. Если гравитационное поле массивного объекта не очень сильное, и другие силы отсутствуют, наблюдатель будет двигаться вдоль линии гравитационного поля с ускорением, равным в каждой точке линии гравитационному ускорению в этой точке. Однако, если масса M достаточно велика, понятие гравитационного поля теряет смысл и необходимо использовать принципы общей теории относительности. В случае плоской симметрии элементарный интервал пространства-времени может быть записан как

$$ds^2 = -c^2\left(\mathrm{d}t'\right)^2 = -fc^2\left(\mathrm{d}t\right)^2 + \frac{\left(\mathrm{d}x\right)^2}{g} + \left(\mathrm{d}y\right)^2 + \left(\mathrm{d}z\right)^2,$$

где $\mathrm{d}t'$ – бесконечно малый интервал времени, измеренный по часам наблюдателя. В общем случае f и g являются функциями координат пространства-времени. Таким образом, наблюдаемое элементарное смещение $\mathrm{d}x$ может считаться подверженным некоторому локальному сжатию, и соответствующее время $\mathrm{d}t$, необходимое для осуществления данных смещений может считаться подверженным некоторому локальному растяжению.
Трудностью общей теории относительности является факт, состоящий в том, что выражение для $\mathrm{d}s^2$ (называемое *метрикой Минковского*), в котором нет переменных факторов, более не выполняется. Далее мы рассмотрим простейшую ситуацию и попытаемся описать события в пространстве-времени, используя другие наборы координат (или параметров) с соответствующими факторами сжатия/растяжения. Это приведёт нас к более удобным выражениям для метрики пространства-времени $\mathrm{d}s^2$.

Рассмотрим точечный объект массой m_0, находящийся в начальный момент времени ($t = t' = 0$ с) в состоянии покоя на оси x в точке $x_0 = c^2/a'$. Он начинает свободно падать в положительном направлении оси, так, что в любой момент времени его ускорение в сопутствующей инерциальной системе координат (в данный момент движущейся вместе с объектом), постоянно и равно a'.

a. Запишите выражение для ускорения тела в системе координат «гравитационного поля», выразив его через скорость «падения» υ, a' и c. Покажите, что результирующая сила, действующая на тело, постоянна.
b. Запишите выражение для υ в терминах t, a' и c.
(*Подсказка*: в интеграле примите, что υ пропорциональна тригонометрической функции.)
Для дальнейшего определим гиперболические функции sinh, cosh и tanh:

$$\sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; ; \; \cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \; ; \; \tanh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Конечно, существуют и определения обратных тригонометрических функций arcsinh, arccosh и arctanh.
c. Запишите выражения для соответствующего времени t' «падающего» тела в терминах t, a' и c.
(*Подсказка*: в интеграле примите, что t пропорционально гиперболической функции. Обозначьте аргумент этой функции через τ.)
Как вы видите, τ пропорционально t'. Другими словами, τ = constant описывает события, которые являются одновременными с точки зрения «падающего» наблюдателя. Следующим шагом будет попытка введения ещё одного параметра ρ, такого, что ρ = constant описывает явления, неподвижные по отношению к «падающему» наблюдателю.
d. Используя метрику Минковского и найденное преобразование для времени, найдите выражение для положения x тела в терминах a', τ и c.
e. Запишите выражение для мировой линии (траектории) в двумерном пространстве-времени ct-x (координаты y и z в данном случае не представляют интереса). Изобразите график зависимости ct от x. Изобразите также световые конуса прошлого и будущего для стационарного наблюдателя, находящегося в начале координат. (Световой конус прошлого является областью пространства и времени откуда сигналы могут достигнуть начала координат. Световой конус будущего является областью пространства-времени; куда могут быть посланы сигналы из начала координат.) На том же графике нарисуйте мировую линию стационарного объекта с координатой $x_1 > x_0$, мимо которого будет пролетать "падающий" объект в какой-то момент времени.
f. В свете сказанного выше будет удобно выбрать значение константы ρ соответствующей нашему телу **в состоянии покоя** в системе координат без гравитации, ρ_0, выбрать равной пространственному постоянному члену, входящему в уравнение, полученное в предыдущем пункте. Выразите ρ_0 через a' и c.
g. Теперь мы естественным образом распространим эти две новые «координаты», найденные для «падающего» тела на (почти) любое событие в пространстве-времени. Выразите x и ct через ρ и τ. И обратно, выразите ρ и τ через x и ct. Какова максимальная область пространства-времени, которая может быть параметризована с использованием этих координат?
h. Выразите метрику Минковского через ρ и τ, и определите факторы f и g, упомянутые во введении к данной задаче.

Полученная метрика называется *метрикой Риндлера* и она аналогична параметризации плоскости с использованием полярных координат. Факторы f и g **не инвариантны при преобразовании Лоренца**, но в этом наиболее простом случае всегда можно вернуться к метрике Минковского для того, чтобы

получить глобально инвариантную метрику. В общем случае получить инвариантную метрику невозможно.
Вы также видели, что метрика Риндлера не покрывает всё пространство-время. Даже если бы мы смогли её расширить, ускоряющийся наблюдатель никогда не получит информацию из **всего** пространства-времени (в отличие от инерциального наблюдателя, чей световой конус прошлого покрывает в бесконечности всё пространство-время). Говорят, что события лежащие на границе области пространства-времени, из которой «падающий» наблюдатель может получать информацию, образуют так называемый *горизонт событий*.
Так как эта новая метрика видит ускоряющееся тело находящимся в состоянии покоя, она приводит к тому, что стационарные объекты в гравитационном поле теперь движутся относительно системы отсчёта в которой отсутствует гравитация!

i. Для упомянутого ранее стационарного объекта с координатой x_1 выразите его траекторию в пространстве-времени в координатах ρ и τ. Изобразите на графике в координатах τ и ρ «мировые линии» обоих рассматриваемых объектов и определите предельное «расстояние» $\Delta\rho$ от горизонта событий до наблюдателя, находящегося в «свободном падении».
j. В момент, когда наблюдатель начинает «падать», маяк, расположенный в точке с координатой x_0 начинает передавать короткие электромагнитные импульсы в положительном направлении оси x, с периодом времени T_0. Сколько таких импульсов достигнет наблюдателя? Запишите выражение для мировой линии первого из них в координатах ρ и τ. Изобразите на графике в координатах τ и ρ мировые линии наблюдателя и первых трёх сигналов.
k. Промежутки между сигналами будут всё увеличиваться и увеличиваться, что означает, что длина волны сигналов будет возрастать (частота будет падать). Пусть ν_0 – частота испускаемых импульсов. Выразите время τ поступления сигналов через время испускания t, x_0 и c. Выразите частоту ν_N последнего принятого сигнала через ν_0, x_0, T_0 и c.
l. Чему равно значение скорости изменения координаты $d\rho/dt'$ сигнала при его регистрации? Изобразите на графике эту «скорость света вдоль направления a' в пространстве-времени, свободном от гравитации» как функцию ρ.
m. Важно отметить, что если рассматривать $d\tau$ как время, текущее в локальной инерциальной системе координат, время в различных точках оси x будет течь по-разному не только как функция координаты точки, но также как функция времени t, прошедшего с момента, когда инерциальный наблюдатель начал «свободно падать». По мере того, как точки пространства формируют горизонт событий, вследствие того, что метрика Риндлера не покрывает всего пространства-времени, время в этих точках останавливается. Например, найдите время dt, начавшееся в точке x_0 как функцию x_0, $d\tau$, t и c. Рассматривая вторую точку, находящуюся на небольшом расстоянии Δx_0 справа от x_0 (то есть в направлении гравитационного поля), определите относительное замедление двух часов, находящихся в этих точках $\varepsilon = \Delta(dt)/dt$, выразив его через x_0, Δx_0, t и c.
n. Теперь предположим, что при $t = 0$ наблюдатель начинает «падать» из состоянии покоя на небольшом расстоянии Δx_0, так, что мы можем приближенно интерпретировать a' как гравитационное ускорение g очень слабого и почти однородного гравитационного поля, такого, как вблизи поверхности Земли. Оцените относительное замедление часов, идущих на

поверхности Земли по отношению к другим идентичным часам, идущим на высоте МКС (Международной космической станции), h = 360 км. Чему равно это время для космонавта, пробывшего один год на МКС? (Движением станции вокруг Земли пренебрегите).

Код участника

ЛИСТ ОТВЕТОВ ЗАДАЧИ No. 1

a.

$B(r) =$

Изобразите здесь линии магнитного поля:

b.

$T_{\text{slant}} =$

c.

$B_{\text{OUT}}(r) =$

$B_{\text{IN}}(r) =$

Изобразите здесь линии магнитного поля:

d.

$B_{\text{WIRE SIDE}}(r) =$

$B_{\text{OTHER SIDE}}(r) =$

Изобразите здесь линии магнитного поля:

Код участника

e.

$\Delta B_{||} =$

f.

$p =$

g.

$B_{\mathrm{OUT}}(r) =$

$B_{\mathrm{IN}}(r) =$

Изобразите здесь линии магнитного поля:

h.

$B_{\mathrm{OUT}}(r) =$

$B_{\mathrm{IN}}(r) =$

Изобразите здесь линии магнитного поля:

i.

$B(r) =$

j.

$B_{\mathrm{OUT}}(r) =$

$B_{\mathrm{IN}}(r) =$

Код участника

ЛИСТ ОТВЕТОВ ЗАДАЧИ No. 2

a.

$E_{\mathrm{kin}} =$

b.

$E_{\mathrm{pot}} =$

c. Запишите дифференциальное уравнение для ε:

$\ddot{x}_{\mathrm{equivalent}} =$

d.

$T_{\mathrm{long}} =$

e.

$E_{\mathrm{mech}} =$

f.

$T_{\mathrm{radial}} =$

Код участника

g.

$\sigma_x =$

$\sigma_y =$

h. Запишите дифференциальное уравнение для $\ddot{x}_{\text{equivalent}}$ and $\ddot{y}_{\text{equivalent}}$:

i.

$\omega_{1;2} =$

j.

$T_{\text{Биений}} =$

k.

$G =$

l.

$T_{\text{slant}} =$

m.

$T_{\text{slant}} =$

Код участника

n.

$T_{\text{скручив}} =$

o.

$C =$

Код участника

ЛИСТ ОТВЕТОВ ЗАДАЧИ No. 3

a.

$a =$

$F_{\text{результ}} =$

b.

$\upsilon =$

c.

$t' =$

d.

$x =$

e. Запишите уравнение для мировой линии и изобразите здесь график.

Код участника

f.

$\rho_0 =$

g.

$x =$ $\rho =$

$ct =$ $\tau =$

Максимальная область пространства-времени, параметризуемая метрикой Риндлера:

h.

$ds^2 =$

$f =$ $g =$

i. Запишите уравнение для мировой линии и изобразите здесь график.

$\Delta\rho =$

Код участника

j. Запишите уравнение для мировой линии и изобразите здесь график.

$N =$

k.

$\tau =$

$\nu_N =$

l. Запишите выражение для $d\rho/d\tau$ и приведите здесь график.

Код участника

m.

dt =

ε =

n.

ε =

Δt =