1. MAGNETOSTATICĂ

Tensiunea magnetomotoare (tmm) de-a lungul unei curbe se defineşte ca integrala de drum a proiecției inducției magnetice B de-a lungul curbei,

$$\int_{\text{curve}} \vec{B}\vec{dl}\,.$$

Legea Circuitală Ampere afirmă că tensiunea magnetomotoare de-a lungul unei curbe închise (buclă) este proporțională cu curentul electric ce traversează **ORICE** suprafață a cărei frontieră este constituită de această buclă. Constanta de proporționalitate se numeşte *permeabilitatea magnetică a vidului* (μ_0).

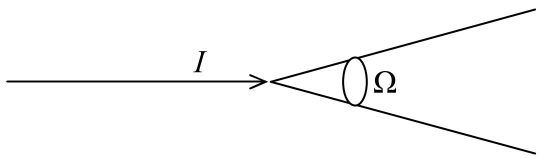
$$\oint_{\text{loop}} \vec{B}\vec{dl} = \mu_0 I_{\text{across}}$$

Sensul pozitiv al curentului este asociat drumului urmat pe buclă prin intermediul *regulii burghiului drept*.

a. Un fir conductor drept, infinit de lung, este parcurs de un curent continuu I. Găsiți valoarea şi orientarea inducției magnetice B generate de acest curent la distanța r de fir. Exprimați rezultatul în funcție de I, r şi μ_0.

b. O tijă subțire uniformă de masă m şi lungime L este plasată paralel cu firul, la distanța d. Tija se poate doar roti în jurul unei axe perpendiculare pe planul determinat de fir şi de tijă, şi care trece prin mijlocul tijei. Tija este parcursă de un curent continuu I' în sens opus lui I. Tija este înclinată cu un mic unghi fața de poziția de echilibru şi lăsată să oscileze liber. Găsiți perioada micilor oscilații ale tijei în funcție de I, I', m, L, d şi μ_0.

c. Un fir conductor drept semiinfinit se continuă cu o suprafață conductoare conică infinită, a cărei axă coincide cu firul, aşa ca în figura alăturată. Sistemul este parcurs de un curent continuu I. Găsiți valoarea şi orientarea inducției magnetice B la distanța r de axă, atât în interiorul cât şi în afara suprafeței conice. Exprimați rezultatul în funcție de I, r şi μ_0.



d. Un fir conductor drept semiinfinit este conectat la capăt cu un plan conductor infinit, plasat perpendicular pe fir. Sistemul este parcurs de un curent continuu I. Găsiți valoarea şi orientarea inducției magnetice B la distanța r de axul firului, de ambele părți ale planului. Exprimați rezultatul în funcție de I, r şi μ_0.

e. Se defineşte densitatea liniară de curent $\vec{J}$ care circulă pe planul de la punctul anterior:

$$J \overset{\text{def}}{=} \frac{dI}{dl},$$

unde dl este o lungime elementară perpendiculară pe linia de curent ce transportă un curent elementar dI.

Se introduce un versor $\vec{n}$ perpendicular pe plan, pentru a indica sensul pozitiv de traversare a planului dintr-o parte în alta. Produsul vectorial $\vec{J}\times\vec{n}$ determină sensul pozitiv al componentei lui B paralele cu planul.

Arătați că la traversarea planului, saltul valorii componentei lui B paralele cu planul este proporțional cu valoarea lui J din punctul de traversare, şi găsiți constanta de proporționalitate.

f. Un plan conductor infinit este paralel cu un câmp magnetic uniform. Inducția magnetică B are aceeaşi orientare de ambele părți ale planului, dar valori diferite B_1 şi B_2. Găsiți presiunea exercitată asupra planului. Exprimați rezultatul în funcție de B_1, B_2, şi μ_0.

g. O sferă conductoare goală este conectată la cei doi poli cu două fire conductoare drepte semiinfinite, orientate pe axa polilor. Sistemul este parcurs de un curent continuu I. Găsiți valoarea şi orientarea inducției magnetice B la distanța r de axa polilor, atât înăuntrul cât şi în afara sferei. Exprimați rezultatul în funcție de I, r, şi μ_0.

h. O sferă conductoare goală are polii conectați printr-un fir conductor interior drept. Pe suprafața sferei circulă de la un pol la altul un curent continuu I, care se întoarce apoi prin fir. Găsiți valoarea şi orientarea inducției magnetice B la distanța r de axa polilor, atât înăuntrul cât şi în afara sferei. Exprimați rezultatul în funcție I, r şi μ_0.

Legea Biot-Savart dă expresia inducției magnetice generate într-un punct din spațiu de un curent electric ce parcurge un drum elementar dl:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I \left(\overrightarrow{dl} \times \vec{r}\right)}{4\pi r^3},$$

unde r este poziția punctului față de curentul elementar.

i. Un fir conductor drept de lungime L este parcurs de un curent continuu I. Firul este privit dintr-un punct din planul lui mediator sub unghiul 2α. Exprimați valoarea inducției magnetice în acel punct în funcție de L, I, α şi μ_0.

j. Pe suprafața unei sfere conductoare de rază R circulă în mod uniform un curent continuu I de la un pol la celălalt. Aflați valoarea inducției magnetice în planul ecuatorial al sferei, într-un punct aflat la distanța r de axa polilor, atât înăuntrul cât şi în afara sferei. Exprimați rezultatul în funcție de I, R, r şi μ_0.

2. OSCILAȚII ALE UNOR CORPURI ELASTICE

În această problemă se neglijează efectele gravitației. Dacă nu se precizează altfel, substanțele trebuie considerate tot timpul ca fiind omogene şi izotrope.

A. Se consideră o bară elastică foarte subțire, împiedicată să se îndoaie. Bara are lungimea L, densitatea ρ, şi modulul de elasticitate Young E. Secțiunea transversală a barei se consideră constantă. Bara este întinsă puțin de la ambele capete şi lăsată să oscileze liber.

a. Scrieți energia cinetică a barei la un moment oarecare în funcție de masa m, lungimea L, şi viteza de variație a alungirii relative ε.

b. Scrieți energia potențială elastică a barei la un moment oarecare de timp în funcție de m, ρ, E şi ε.

c. Arătați că aplicarea conservării energiei pentru bară conduce la ecuația diferențială caracteristică unei oscilații armonice neamortizate. Recurgând la analogia cu un punct material asupra căruia acționează forța σS (σ fiind efortul unitar şi S fiind secțiunea transversală), precizați mărimea care joacă aici rolul coordonatei.

d. Scrieți expresia perioadei micilor oscilații longitudinale ale barei în funcție de L, ρ şi E.

B. Considerați o sferă elastică de rază R, făcută din acelaşi material ca bara de mai înainte. Fie ε deformarea relativă $\Delta R/R$. Sfera este comprimată puțin în mod uniform şi apoi lăsată să oscileze liber.

e. Scrieți energia mecanică a sferei la un moment oarecare în funcție de m, R, ρ, E, ε şi de viteza de variația a lui ε.

f. Scrieți expresia perioadei micilor oscilații radiale ale sferei în funcție de R, ρ şi E.

C. Considerați o placă dreptunghiulară elastică foarte subțire, împiedicată să se îndoaie. Placa are dimensiunile liniare L şi respectiv l. Grosimea plăcii se consideră constantă.

Efectele eforturilor unitare σ_x şi σ_y care acționează asupra plăcii **NU** sunt independente, în sensul că o alungire pe una din direcții conduce la o contractare pe cealaltă direcție. În limitele legii lui Hooke, aceasta se poate scrie:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\mu \frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= -\mu \frac{\sigma_x}{E} \end{aligned},$$

unde factorul adimensional μ (coeficientul Poisson) ia valori în jurul lui 0,3.

g. Exprimați σ_x şi σ_y în funcție de ε_x, ε_y, E şi μ.

h. Scrieți sistemul de ecuații diferențiale pentru mişcarea unui punct material de masă m pe două direcții ortogonale, utilizând drept coordonate mărimea echivalentă găsită la punctul **c**.

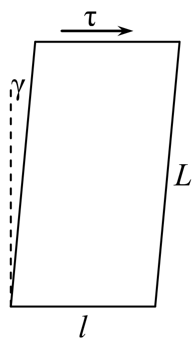
i. Găsiți valorile posibile ale lui ω pentru care soluțiile sistemului de mai sus reprezintă simple oscilații armonice neamortizate (moduri):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= A \sin \omega t \\ \varepsilon_y &= B \sin \omega t \end{aligned}.$$

Exprimați rezultatele în funcție de L, l, ρ, E şi μ.

j. În general, soluția sistemului de ecuații de mai sus este o suprapunere a celor două moduri găsite. Pentru o placă pătrată ($L = l$) şi un coeficient Poisson mic ($\mu^2 << 1$), exprimați perioada bătăilor în funcție de μ şi de perioada T_{long} a oscilațiilor longitudinale ale unei bare cu aceeaşi lungime.

D. Acum, în loc să fie comprimată, placa este puțin înclinată de-a lungul uneia din dimensiuni, prin acțiunea unui efort unitar de forfecare τ, aşa ca în figura alăturată. Deformarea relativă la forfecare se defineşte ca fiind $\tan\gamma \approx \gamma$, iar legea lui Hooke ia forma:



$$\gamma = \frac{1}{G}\tau \text{ ; } [\tau]_{SI} = [G]_{SI} = \mathrm{N/m^2} ,$$

unde G este aşa numitul *modul elastic de forfecare*.
k. Exprimați G în funcție de E şi μ.
l. Găsiți perioada micilor oscilații de forfecare ale plăcii în funcție de L, ρ şi G. Exprimați aceeaşi perioadă în funcție de μ şi de perioada oscilațiilor longitudinale ale unei bare cu aceeaşi lungime, T_{long}.

E. Un cilindru de rază R şi lungime L, făcut din acelaşi material ca mai înainte, este torsionat puțin şi lăsat să oscileze liber. Deformarea relativă la torsiune este definită ca fiind unghiul θ cu care este răsucit cilindrul sub acțiunea unui moment al forței deformatoare. Legea lui Hooke ia acum forma:

$$\theta = \frac{1}{C} M \text{ ; } [C]_{SI} = [M]_{SI} = \mathrm{Nm} ,$$

unde C este aşa numita *constantă elastică de torsiune*.
m. Găsiți perioada micilor oscilații de torsiune ale cilindrului în funcție de L, ρ, şi G.
n. Exprimați constanta elastică de torsiune în funcție de R, L, E şi μ.

3. FUNDAMENTE DE RELATIVITATE GENERALIZATĂ

Einstein a declarat că ideea Principiului Echivalenței (1907) a fost "cel mai fast gând (*die glückichste Gedanken*) din viața mea". El își aduce aminte că "stăteam pe scaun la oficiul de patente din Berna, când m-a străfulgerat un gând: ***dacă o persoană se află în cădere liberă, ea nu resimte propria sa greutate***. Eram uimit. Acest gând simplu m-a marcat profund. El m-a îmboldit către o teorie a gravitației."
Deci, dacă un observator se află în cădere liberă, el poate fi privit ca un sistem de referință inerțial în care câmpul gravitațional este abrogat. Din nefericire, întrucât diverşi observatori în spațiu şi timp se vor fi aflând în cădere liberă cu diferite accelerații şi/sau pe diferite direcții, Einstein şi-a dat seama că va trebui să se utilizeze doar sisteme de referință ***locale***, astfel încât în cadrul fiecăruia accelerația datorată gravitației să fie constantă atât ca valoare cât şi ca direcție.
Ca atare, se consideră un observator punctiform de masă neglijabilă nenulă, aflat în vecinătatea unui obiect masiv de masă M. În cazul în care câmpul gravitațional al obiectului masiv nu este prea puternic, şi în absența altor forțe, observatorul se va mişca de-a lungul unei linii de câmp gravitațional cu o accelerație egală în fiecare punct cu accelerația gravitațională din punctul respectiv. Însă dacă masa M este suficient de mare, noțiunea de câmp gravitațional îşi pierde înțelesul şi trebuie folosite în schimb conceptele relativității generalizate. Ceea ce rămâne totuşi adevărat este faptul că în situații cu simetrie plană intervalul spațiotemporal elementar poate fi scris

$$ds^2 = -c^2\left(\mathrm{d}t'\right)^2 = -fc^2\left(\mathrm{d}t\right)^2 + \frac{\left(\mathrm{d}x\right)^2}{g} + \left(\mathrm{d}y\right)^2 + \left(\mathrm{d}z\right)^2,$$

unde $\mathrm{d}t'$ reprezintă durata elementară măsurată de ceasul observatorului. În general f şi g sunt funcții de coordonatele spațiotemporale. În consecință, deplasările elementare $\mathrm{d}x$ observate pot fi privite ca fiind afectate de un factor local oarecare de comprimare, iar duratele corespunzătoare efectuării acestor deplasări pot fi privite ca fiind afectate de un factor local oarecare de dilatare.
Aşadar, dificultatea care apare în relativitatea generalizată constă în faptul că expresia cunoscută pentru $\mathrm{d}s^2$ (numită *metrica Minkowski*), în care nu intră niciun fel de factori, nu mai este valabilă. În ceea ce urmează, ne vom ocupa de cea mai simplă situație posibilă şi vom încerca să descriem evenimentele din spațiutimp folosind alte seturi de coordonate (sau, mai corect, parametri) decât cele obişnuite, dimpreună cu factorii de comprimare/dilatare corespunzători. Ele ne vor conduce către expresii mai adecvate ale metricei $\mathrm{d}s^2$ a spațiutimpului.

Să considerăm un obiect punctiform cu masa de repaus m_0, aflat inițial ($t = t' = 0$ s) în repaus pe axa Ox într-un punct $x_0 = c^2/a'$. El începe acum să "cadă liber" în direcția pozitivă a axei, astfel încât la orice moment de timp accelerația proprie resimțită într-un sistem de referință momentan solidar cu obiectul este constantă, a'.
a. Scrieți expresia accelerației obiectului în sistemul de referință al "câmpului gravitațional", în funcție de viteza sa de "cădere" v, a' şi c. Arătați că forța totală acționând asupra corpului este constantă.
b. Găsiți expresia lui v în funcție de t, a' şi c.
(*Indicație*: la integrare, luați v ca fiind proporțională cu o funcție trigonometrică.)

Pentru ce urmează, trebuie să definim funcţiile hiperbolice sinh, cosh şi tanh:

$$\sinh x \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \;;\; \cosh x \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \;;\; \tanh x \overset{\text{def}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Desigur, există definiţii corespondente şi pentru funcţiile hiperbolice inverse arcsinh, arccosh şi arctanh.

c. Găsiţi expresia timpului propriu t' a corpului în "cădere" în funcţie de t, a' şi c. (*Indicaţie*: la integrare, luaţi t ca fiind proporţional cu o funcţie hiperbolică. Notaţi argumentul acestei funcţii cu τ.)

După cum vedeţi, τ este proporţional cu t'. Cu alte cuvinte, τ = constant descrie evenimente care sunt simultane din punctul de vedere al observatorului aflat în "cădere". Deci pasul următor ar fi să se introducă încă un parametru, să îi zicem ρ, astfel încât ρ = constant să descrie fenomene în repaus faţă de observatorul "în cădere".

d. Folosind metrica Minkowski şi transformarea găsită pentru timp, găsiţi expresia poziţiei x a corpului în funcţie de a', τ şi c.

e. Scrieţi ecuaţia liniei de univers (traiectoriei) corpului în spaţiutimpul bidimensional ct-x (coordonatele y şi z nu sunt de vreun interes anume aici). Desenaţi graficul lui ct ca funcţie de x, trasând de asemenea conurile luminoase trecut şi viitor ale unui observator staţionar aflat în originea sistemului. (Conul luminos trecut este regiunea de spaţiutimp din care pot sosi semnale în origine; conul luminos viitor este regiunea de spaţiutimp către care se pot transmite semnale din origine.) Pe aceeaşi diagramă trasaţi linia de univers a unui obiect staţionar având o coordonată oarecare $x_1 > x_0$, pe lângă care corpul aflat "în cădere" va trece cândva.

f. În lumina celor spuse mai sus, se va dovedi foarte convenabil să se aleagă valoarea constantă a lui ρ corespunzătoare corpului nostru aflat **în repaus** în sistemul de referinţă lipsit de gravitaţie, să îi zicem ρ_0, ca fiind egală cu termenul spaţial constant care intervine în ecuaţia găsită la punctul anterior. Exprimaţi ρ_0 în funcţie de a' şi c.

g. Acum vom extinde în mod firesc aceste două noi "coordonate" găsite pentru corpul aflat "în cădere" la evenimente (aproape) arbitrare în spaţiutimp. Exprimaţi x şi ct în funcţie de ρ şi τ. Reciproc, exprimaţi ρ şi τ în funcţie de x şi ct. Care este regiunea maximă de spaţiutimp ce poate fi parametrizată folosind aceste coordonate?

h. Transformaţi metrica Minkowski făcând uz de ρ şi τ, şi identificaţi factorii f şi g menţionaţi în introducerea problemei.

OK, haideţi să luăm o scurtă pauză şi să aruncăm o privire mai atentă acestei noi metrice pe care aţi găsit-o. Ea se numeşte *metrica Rindler*, şi arată analog cu parametrizarea unui plan folosind coordonate polare. Aşa cum este probabil de aşteptat, factorii f şi g **nu sunt invarianţi la transformările Lorentz**, dar în acest caz extrem de simplu se poate oricând reveni la metrica Minkowski pentru a obţine o metrică global invariantă. Totuşi în general se dovedeşte imposibil de avut o metrică invariantă.

Aţi văzut de asemenea că metrica Rindler nu poate acoperi tot spaţiutimpul. Chiar dacă am putea-o extinde, se poate observa uşor că un observator care accelerează nu poate primi niciodată informaţie din **tot** spaţiutimpul (spre deosebire de un observator inerţial, al cărui con luminos trecut va acoperi către infinit întreg spaţiutimpul). Se spune că evenimentele situate pe frontiera regiunii spaţiotemporale din care poate obţine informaţie observatorul aflat în "cădere" alcătuiesc aşa numitul *orizont evenimenţial*.

În fine, cum această nouă metrică priveşte un corp ce accelerează drept fiind în repaus, rezultă că obiectele staţionare într-un câmp gravitaţional se găsesc acum în mişcare în raport cu sistemul de referinţă lipsit de gravitaţie!

i. Pentru obiectul staționar de la x_1 menționat mai devreme, exprimați traiectoria sa în spațiutimp în coordonate ρ şi τ. Desenați pe un grafic τ funcție de ρ "liniile de univers" ale ambelor obiecte luate în discuție, şi determinați "distanța" limită Δρ a orizontului evenimențial față de observatorul aflat în "cădere liberă".
j. În momentul în care observatorul începe să "cadă", o baliză aflată în x_0 începe să emită pulsuri electromagnetice foarte scurte în direcția pozitivă a axei Ox, la intervale constante de timp T_0. Câte astfel de semnale vor ajunge la observator? Scrieți expresia liniei de univers pentru primul dintre ele în funcție de coordonatele ρ şi τ. Desenați pe un grafic τ funcție de ρ liniile de univers ale primelor trei semnale şi cea a observatorului.
k. Desigur, semnalele recepționate vor fi tot mai rare, aceasta însemnând că ele vor avea lungimi de undă tot mai mari (frecvențe tot mai mici). Fie ν_0 frecvența pulsurilor emise. Exprimați momentul recepționării τ în funcție de momentul emiterii t, x_0 şi c. Determinați frecvența ultimului semnal recepționat în funcție de ν_0, x_0, T_0 şi c.
l. Care este valoarea vitezei de variație a coordonatei semnalelor, $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t'$, în momentul recepționării lor? Trasați graficul acestei "viteze a luminii pe direcția lui a' în spațiutimpul lipsit de gravitație" ca funcție de ρ.
m. Unul din cele mai importante aspecte atunci când se consideră dτ ca fiind timpul scurs într-un sistem de referință inerțial local este acela că timpul din diferite locuri de pe axa Ox va curge diferit nu numai ca funcție de poziția respectivă, ci şi de timpul t scurs din momentul începerii "căderii libere" a observatorului inerțial. Pe măsură ce punctele spațiutimpului se aglomerează formând orizontul evenimențial, cum metrica Rindler nu acoperă tot spațiutimpul, timpul în acele puncte pare să tindă a se opri. De pildă, găsiți timpul dt scurs în x_0 ca funcție de x_0, dτ, t şi c. Considerând un al doilea punct la o mică distanță Δx_0 la dreapta lui x_0 (adică în direcția câmpului gravitațional), determinați încetinirea relativă a două ceasuri care funcționează în aceste puncte, $\varepsilon = \Delta(\mathrm{d}t)/\mathrm{d}t$, în funcție de x_0, Δx_0, t şi c.
n. Să presupunem acum că la $t = 0$ observatorul începe să "cadă" din repaus pe o distanță scurtă Δx_0, astfel încât să putem aproximativ interpreta pe a' ca fiind accelerația gravitațională g a unui câmp gravitațional foarte slab şi aproape uniform, aşa cum este cel din apropierea suprafeței Pământului. Estimați încetinirea relativă a unui ceas care funcționează la suprafața Pământului în raport cu un ceas identic care funcționează la altitudinea ISS-ului, h = 360 km. Ce durată ar însemna aceasta pentru un astronaut care petrece 1 an într-o misiune pe ISS? (Neglijați faptul că stația se mişcă în jurul Pămâtului.)

Contestant code

FOAIE DE RĂSPUNS PENTRU PROBLEMA No. 1

a.

$B(r) =$

Desenați liniile de câmp aici:

b.

$T_{\text{slant}} =$

c.

$B_{\text{OUT}}(r) =$

$B_{\text{IN}}(r) =$

Desenați liniile de câmp aici:

d.

$B_{\text{WIRE SIDE}}(r) =$

$B_{\text{OTHER SIDE}}(r) =$

Desenați liniile de câmp aici:

Contestant code

e.

$\Delta B_{\parallel} =$

f.

$p =$

g.

$B_{\mathrm{OUT}}(r) =$

$B_{\mathrm{IN}}(r) =$

Desenați liniile de câmp aici:

h.

$B_{\mathrm{OUT}}(r) =$

$B_{\mathrm{IN}}(r) =$

Desenați liniile de câmp aici:

i.

$B(r) =$

Contestant code

j.

$B_{\mathrm{OUT}}(r) =$

$B_{\mathrm{IN}}(r) =$

Contestant code

FOAIE DE RĂSPUNS PENTRU PROBLEMA No. 2

a.

$E_{\mathrm{kin}} =$

b.

$E_{\mathrm{pot}} =$

c. Scrieți ecuația diferențială pentru ε:

$\ddot{x}_{\mathrm{equivalent}} =$

d.

$T_{\mathrm{long}} =$

e.

$E_{\mathrm{mech}} =$

f.

$T_{\mathrm{radial}} =$

Contestant code

g.

$\sigma_x =$

$\sigma_y =$

h. Scrieți ecuațiile diferențiale pentru $\ddot{x}_{equivalent}$ şi $\ddot{y}_{equivalent}$:

i.

$\omega_{1;2} =$

j.

$T_{beats} =$

k.

$G =$

l.

$T_{slant} =$

m.

$T_{slant} =$

Contestant code

n.

$T_{\text{twist}} =$

o.

$C =$

Contestant code

FOAIE DE RĂSPUNS PENTRU PROBLEMA No. 3

a.

$a =$
$F_{\text{net}} =$

b.

$v =$

c.

$t' =$

d.

$x =$

Contestant code

e. Scrieți ecuația liniei de univers şi desenați graficul aici.

f.

$\rho_0 =$

g.

$x =$ $\rho =$

$ct =$ $\tau =$

Regiunea maximă de spațiutimp parametrizată de metrica Rindler:

Contestant code

h.

$ds^2 =$

$f =$ $g =$

i. Scrieţi ecuaţia liniei de univers şi desenaţi graficul aici.

$\Delta\rho =$

Contestant code

j. Scrieți ecuația liniei de univers şi desenați graficul aici.

N =

k.

τ =

ν_N =

Contestant code

l. Scrieţi expresia lui $d\rho/dt'$ şi desenaţi graficul aici.

m.

$dt =$

$\varepsilon =$

n.

$\varepsilon =$

$\Delta t =$