

1. 静磁学

沿某一曲线的磁动势(mmf)为磁场的磁感应强度 B 沿该曲线的积分,

$$\int_{\text{curve}} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

安培环路定理表明沿某一闭合曲线(loop)的磁动势与穿过任何一个由该曲线包围的曲面的电流强度成正比, 比例系数称为真空磁导率(μ_0).

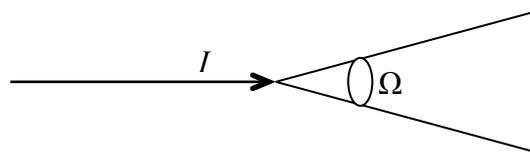
$$\oint_{\text{loop}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{across}}$$

电流的正方向由右手螺旋法则确定。

a. 一个无限长直导线载有稳恒电流 I 。求距导线 r 处磁场的磁感应强度 B 的大小和方向。结果用 $I, r,$ 和 μ_0 表达。

b. 把一个质量为 m , 长度为 L 的均匀细棒放置在距导线 d 处, 使细棒与导线平行。细棒只能绕与细棒和导线所在平面垂直的轴转动。细棒载有与 I 反向的稳恒电流 I' 。使细棒偏离其平衡位置后令其自由振荡。求细棒小幅振荡的周期。结果用 $I, I', m, L, d,$ 和 μ_0 表达。

c. 如图所示, 一个半边无限长的直导线与一个无限大圆锥型导体面连接, 直导体与圆锥面的对称轴重合。整个系统载有稳恒电流 I 。求距轴 r 处(包括圆锥内和圆锥外)磁场的磁感应强度 B 的大小和方向。结果用 $I, r,$ 和 μ_0 表达。



d. 一个半边无限长的直导线的端点与一个无限大导体平面相连, 平面与导线垂直。整个系统载有稳恒电流 I 。求平面两边距导体轴线 r 处磁场的磁感应强度 B 的大小和方向。结果用 $I, r,$ 和 μ_0 表达。

e. 定义上一问中流经平面的电流线密度 \vec{J} 为:

$$\vec{J} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dI}{dl},$$

其中 dl 为垂直于电流 dI 方向的线元。

用单位矢量 \vec{n} 表达穿过平面的正方向。用叉乘 $\vec{J} \times \vec{n}$ 表达 B 与平面平行的分量的正方向。

试证明从某点穿过平面时, B 与平面平行的分量的改变量与该点的电流线密度 \vec{J} 的大小成正比, 并确定比例常数。

f. 一个无限大导体平面与一匀强磁场平行。平面两边磁场的磁感应强度 B 和方向相同, 但大小分别为 B_1 和 B_2 。求导体表面所受压强。结果用 $B_1, B_2,$ 和 μ_0 表达。

g. 一个导体球壳在其两极与两个半无限长导线相连。导线沿两极的连线方向。整个系统载有稳恒电流 I 。求距连接两极的轴线 r 处(包括球壳内和球壳外)磁场的磁感应强度 B 的大小和方向。结果用 $I, r,$ 和 μ_0 表达。

h. 一个导体球壳的两极与球壳内的一根直导线相连。稳恒电流 I 从一极流出, 经球壳表面流到另一极后再经直导线流回。求距连接两极的轴线 r 处(包括球壳内和球壳外)磁场的磁感应强度 B 的大小和方向。结果用 $I, r,$ 和 μ_0 表达。

毕奥—萨法尔定律电流元在空间某点产生的磁场的磁感应强度:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I (\vec{dl} \times \vec{r})}{4\pi r^3},$$

其中 r 为该点到电流元的距离。

i. 一个长度为 L 的直导线载有稳恒电流 I 。导线相对其中截面上某点的张角为 2α 。求该点磁场的磁感应强度 B 的大小，结果用 L, I, α , 和 μ_0 表达。

j. 稳恒电流 I 均匀地流过半径为 R 的导体球的表面，从球的一极到达另一极。求球体赤道面上距两极的连线 r 处（包括球内和球外）磁场的磁感应强度 B 的大小（只考虑球体表面上电流的贡献）。结果用 I, R, r 和 μ_0 表达。

2. 弹性体的振动

在本题中我们忽略引力的影响。我们假设所有物质都是均匀且各向同性的，除非另有说明。

A. 考虑一个不弯曲的弹性细棒。棒的长度为 L ，密度为 ρ ，杨氏模量为 E 。细棒的截面积为常量。将细棒从两端轻轻拉伸后释放以使其自由振动。

- 试写出某一时刻细棒的动能，结果用棒的质量 m ，长度 L ，应变变量 ε 表达。
- 试写出某一时刻细棒的弹性势能，结果用 m ， ρ ， E 和 ε 表达。
- 试证明由细棒的机械能守恒可导出一个无衰减简谐振动的典型的微分方程。利用与在力 σS (σ 为张应力, S 为截面积) 作用下质量为 m 的质点的运动的相似性，说明此处与坐标对应的物理量。
- 试写出小幅纵向振动的周期的表达式，结果用 L , ρ , 和 E 表达。

B. 考虑一个与细棒相同材质半径为 R 的弹性球。令 ε 为应变 $\Delta R/R$ 。将球不均匀轻压后让其自由振荡。

- 试写出某一时刻球的机械能，结果用 m , R , ρ , E , ε 和 ε 的改变率表达。
- 试写出小幅径向振动的周期的表达式，结果用 R , ρ 和 E 表达。

C. 考虑一个不弯曲的矩形弹性薄片。薄片的长宽分别是 L 和 l 。薄片的厚度为常量。

作用在薄片上的应力 σ_x 和 σ_y 的效应不是独立的，即一个方向的拉伸导致另一个方向的压缩。在虎克定律成立的条件下，我们有：

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -\mu \frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= -\mu \frac{\sigma_x}{E}\end{aligned}$$

其中无量纲因子 μ (波松比) 的取值约为 0.3。

- 试将 σ_x 和 σ_y 用 ε_x , ε_y , E , 和 μ 表达出来。
- 利用 **c** 问中确立的坐标对应关系，写出描述质量为 m 的质点的沿两个垂直方向运动的微分方程组。
- 求上述方程组无衰减简谐振动模式：

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= A \sin \omega t \\ \varepsilon_y &= B \sin \omega t\end{aligned}$$

对应的所有 ω 的可能取值，结果用 L , l , ρ , E , 和 μ 表达。

- 在一般情况下，前面所述方程组的解为以上两种模式的叠加。在方形薄片 ($L = l$) 和弱波松比 ($\mu^2 \ll 1$) 的条件下，求拍的周期。结果用 μ 和相同长度的细棒的纵向振动周期 T_{long} 表达。

D. 如图所示，考虑在剪切应力 τ 的作用下，薄片发生倾斜。定义切应变为 $\tan \gamma \approx \gamma$ ，则虎克定律可表达为：

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau ; [\tau]_{\text{SI}} = [G]_{\text{SI}} = \text{N/m}^2,$$

其中 G 为切变模量。

k. 试将 G 用 E 和 μ 表达出来。

l. 试将薄片的小幅振动周期用 L , ρ 和 G 表达出来。再把同一结果用 μ 和相同长度的细棒的纵向振动周期 T_{long} 表达出来。

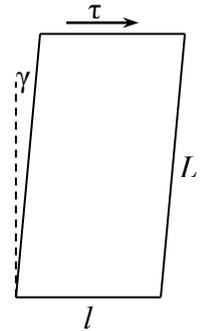
E. 把一个与细棒相同材质半径为 R 长度为 L 的圆柱轻轻扭转后释放，令其自由振动。定义扭应变为圆柱在扭力矩作用下扭转的角度 θ ，则虎克定律可表达为：

$$\theta = \frac{1}{C} M ; [C]_{\text{SI}} = [M]_{\text{SI}} = \text{Nm},$$

其中 C 为弹性扭转常量。

m. 求圆柱小幅扭转振动的周期，结果用 L , ρ , 和 G 表达。

n. 将弹性扭转常量用 R , L , E 和 μ 表达出来。



3. 广义相对论基础知识

爱因斯坦说 1907 年广义相对论理论是他生命中非常幸运的一个想法。他回忆道“我坐在伯尔尼（瑞士首都）专利局椅子上的时候一个想法突然出现在头脑中：如果一个人做自由落体运动时，他将感受不到自己的重力。我大吃一惊。这个简单的想法在我头脑中打下了一个深深的烙印，它把我的思维注入了引力论的灵感。”

一个自由下落的观察者会认为自己是在一个没有引力场的惯性参考系中。不幸的是，由于时空中不同的观察者下落的速率和方向可以不同，爱因斯坦意识到，观察者必须使用局域参考系，以使每个参考系中的观察者看到的由于引力所产生的加速度是一个常矢量。

考虑处于一个具有巨大质量 M 的物体附近的一个质量很小但非零的点状观察者。如果巨大物体的引力场不太强，而且没有其它外力，观察者会沿着重力场线运动，且每个位置处的加速度等于该点的重力加速度。然而，如果质量足够大，则引力场的概念失去意义，我们必须使用广义相对论的概念。在具有平面对称性的情况下，无限小时空间隔可写成：

$$ds^2 = -c^2 (dt')^2 = -fc^2 (dt)^2 + \frac{(dx)^2}{g} + (dy)^2 + (dz)^2,$$

其中 dt' 是用观察者的时钟测量的无限小时间间隔。一般情况下， f 和 g 是时空坐标的函数。所观测到的无限小位移 dx 上需要乘上一个局域收缩因子，而无限小时间间隔 dt 上需要乘上一个局域膨胀因子。

以下我们将考虑最简单的情形。我们将采用另一套坐标和相应的收缩 / 膨胀因子，进而得到更合适的关于 ds^2 的表达式。

考虑一个静质量为 m_0 的点状物体。开始时 ($t = t' = 0$ s) 该物体停在 x 轴上 $x_0 = c^2/a'$ 处。之后该物体沿 x 轴正方向自由下落。在任意时刻，从一个与物体瞬间同步运动的惯性参照系看来，物体的加速度为常量 a' 。

a. 写出在“引力场”参照系中物体加速度的表达式，并用“下落”的速度 v 、 a' 和 c 来表达。说明作用在物体上的净力为常量。

b. 求 v 的表达式，结果用 t 、 a' 和 c 表达。

(提示：在积分中，令 v 正比于一个三角函数。)

接下来我们会用到双曲函数 \sinh 、 \cosh 和 \tanh ，它们的定义式为：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

双曲函数的反函数为 $\operatorname{arcsinh}$ 、 $\operatorname{arccosh}$ 和 $\operatorname{arctanh}$ 。

c. 求物体“下落”时间 t' 的表达式，用 t 、 a' 和 c 来表达。

(提示：在积分中，令 t 与双曲函数成比例，用 τ 来表示这个函数宗量)

你会发现， τ 和 t' 成比例。换言之， $\tau = \text{常量}$ 描述的是在“下落”观察者看来是同时发生的事件。下一步我们引入另一个参数 ρ ，使得 $\rho = \text{常量}$ 描述的是相对“下落”观察者静止的事件。

d. 利用闵科夫斯基度规和已求得的时间变换式，求用 a' 、 τ 和 c 表达物体位置 x 的表达式。

- e. 写出二维时空 $ct-x$ (这里我们不关心坐标 y 和 z) 中物体的世界线 (轨迹) 的方程。画出 ct 关于 x 的曲线, 同时画出位于原点的静止观察者的过去和未来的光锥。(过去光锥和未来光锥为时空中的特定区域。从过去光锥中任意一点发出的信号可以到达原点, 由原点发出的信号可到达未来光锥中的任何一点。) 在同一图上画出一位于 $x_1 > x_0$ 处静止物体的世界线。
- f. 根据以上的说明, 选用在一个失重参照系中所讨论的物体对应常数 ρ 的值 ρ_0 作为上一问求得的方程中的空间常数是很方便的。试用 a' 和 c 表达 ρ_0 。
- g. 现在我们把研究“下落”物体中得到的两个新坐标推广到时空中的任意事件。试将 x 和 ct 用 ρ 和 τ 表达出来, 并将 ρ 和 τ 用 x 和 ct 表达出来。求时空中可做这种坐标变换的最大区域。
- h. 把闵科夫斯基度规变换为 ρ 和 τ 表达的形式, 并确定前面所提到的 f 和 g 因子。

我们新得到的度规叫做林德勒度规, 它类似于平面上的极坐标。林德勒度规不能覆盖整个时空。一个加速运动的观察者不可能从整个时空接受信息。在“下落”观察者能接收信息的时空区域边缘上的事件被称为视界。采用此新度规, 加速运动的物体表现为静止, 那么在失重的参照系中在引力场中静止的物体将运动起来!

- i. 求用 ρ 和 τ 表达的静止于 x_1 处的物体的时空轨迹。画出所考虑的两个物体的“世界线”, 即 τ 关于 ρ 的曲线, 求“自由下落”观察者视界的极限“距离” $\Delta\rho$ 。
- j. 在观察者开始“下落”的时刻, 一个位于 x_0 的信号源开始沿 x 的正方向发射间隔为 T_0 非常短的电磁脉冲。有多少信号可以到达观察者? 写出第一个脉冲信号用 ρ 和 τ 表达的世界线的表达式。画出前三个脉冲和观察者用 ρ 和 τ 表达的世界线。
- k. 接收到的信号会越来越稀疏, 亦即信号的波长越来越长 (频率越来越低)。令 ν_0 为所发射脉冲的频率。用 t, x_0 和 c 表达接收脉冲的时间 τ 。确定最后接收到的信号频率, 结果用 ν_0, x_0, T_0 和 c 表达。
- l. 接收到信号时信号坐标的变化率 $d\rho/dt'$ 是多大? 画出失重参照系中沿 a' 方向光速随 ρ 变化的曲线。
- m. 如果将 $d\tau$ 理解为局域惯性参照系中流逝的时间, 那么我们会发现在不同的位置和“自由下落”后不同的时间, 时间的流逝是不同的。空间各点组成视界, 而林德勒度规不覆盖整个时空, 时间在视界好像就停止了。求 x_0 处流逝的时间 dt , 将其表达为 $x_0, d\tau, t$ 和 c 的函数。考虑 x_0 右侧 Δx_0 处的另一点, 求位于这两点的时钟相对减慢量 $\varepsilon = \Delta(dt)/dt$ 结果用 $x_0, \Delta x_0, t$ 和 c 表达。
- n. 现在假设观察者在 $t = 0$ 时刻由静止开始“下落”一段很短的距离 Δx_0 , 在地球表面附近, 我们可以把 a' 理解为重力加速度 g 。估算地球表面和国际空间站 (ISS) 时钟的相对减慢量。ISS 距地面高度为 $h = 360$ km。对于在 ISS 中度过一年时间的宇航员来说, 这个时间差是多少? (不考虑 ISS 绕地球的旋转)

参赛者编号

第一题答题表格

a.

$$B(r) =$$

在此画出磁感线:

b.

$$T_{\text{slant}} =$$

c.

$$B_{\text{OUT}}(r) =$$

$$B_{\text{IN}}(r) =$$

在此画出磁感线:

d.

$$B_{\text{导线方}}(r) =$$

$$B_{\text{另一方}}(r) =$$

在此画出磁感线:

参赛者编号

e.

$$\Delta B_p =$$

f.

$$p =$$

g.

$$B_{\text{OUT}}(r) =$$

$$B_{\text{IN}}(r) =$$

在此画出磁感线:

h.

$$B_{\text{OUT}}(r) =$$

$$B_{\text{IN}}(r) =$$

在此画出磁感线:

i.

$$B(r) =$$

参赛者编号

j.

$$B_{\text{OUT}}(r) =$$

$$B_{\text{IN}}(r) =$$

参赛者编号

第二题答题表格

a.

$$E_{\text{kin}} =$$

b.

$$E_{\text{pot}} =$$

c. 写出关于 ε 的微分方程:

$$\ddot{x}_{\text{equivalent}} =$$

d.

$$T_{\text{long}} =$$

e.

$$E_{\text{mech}} =$$

f.

$$T_{\text{radial}} =$$

参赛者编号

g.

$$\sigma_x =$$

$$\sigma_y =$$

h. 写出关于 $\ddot{x}_{\text{equivalent}}$ 和 $\ddot{y}_{\text{equivalent}}$ 的微分方程:

i.

$$\omega_{1;2} =$$

j.

$$T_{\text{beats}} =$$

k.

$$G =$$

l.

$$T_{\text{slant}} =$$

m.

$$T_{\text{slant}} =$$

参赛者编号

n.

$$T_{\text{twist}} =$$

o.

$$C =$$

参赛者编号

第三题答题表格

a.

$$a =$$

$$F_{\text{net}} =$$

b.

$$v =$$

c.

$$t' =$$

d.

$$x =$$

参赛者编号

e. 写出世界线的方程并画出示意图。

f.

$\rho_0 =$

g.

$x =$

$\rho =$

$ct =$

$\tau =$

求时空中可做这种坐标变换的最大区域：

参赛者编号

h.

$$ds^2 =$$

$$f =$$

$$g =$$

i. 写出世界线的方程并画出示意图

$$\Delta\rho =$$

参赛者编号

j. 写出世界线的方程并画出示意图

$N =$

k.

$\tau =$
 $v_N =$

参赛者编号

l. 写出 $d\rho/d\tau$ 的表达式并绘出曲线

m.

$$dt =$$

$$\varepsilon =$$

n.

$$\varepsilon =$$

$$\Delta t =$$